Sistema Armónico Áureo: Teoría Musical desde la Proporción Divina

Tres sistemas tonales derivados de φ = 1.618... y su implementación en Web Audio

Enero 2026

Carlos Lorente Kaiser & Claude Opus 4.5

Contenidos

Resumen

Este artículo presenta el **Sistema Armónico Áureo**, una teoría musical completa que utiliza la proporción áurea **φ = 1.618033988749895** como operador estructural fundamental. A diferencia de sistemas históricos que usan φ decorativamente, proponemos tres variantes complementarias: **12-φ** (división recursiva), **15-φ** (quintas apiladas) y **12-φW** (híbrido occidental). Cada sistema ofrece una sonoridad única con fundamento matemático coherente. Incluimos implementación completa en JavaScript con 9 simulaciones interactivas y ~11,500 líneas de código.

Palabras clave: proporción áurea, microtonalidad, teoría musical, consonancia, Web Audio API, composición algorítmica, temperamento

1. Introducción: ¿Por qué φ como base armónica?

> *"Geometry has two great treasures: one is the theorem of Pythagoras; the other, the division of a line into extreme and mean ratio. The first we may compare to a measure of gold; the second we may name a precious jewel."*
>
> — *Johannes Kepler*

El **sistema de temperamento igual** (12-TET) ha dominado la música occidental durante siglos. Sin embargo, su elección de dividir la octava en 12 partes iguales (100 cents cada una) es *arbitraria desde un punto de vista matemático*. Si bien ofrece pragmatismo —todas las tonalidades suenan igual—, sacrifica las relaciones naturales de ratios simples.

Históricamente, sistemas como la **afinación pitagórica** (ratios 2:1, 3:2, 4:3), la **entonación justa** (5:4, 6:5) y los **temperamentos mesotónicos** buscaban consonancia basada en ratios de números enteros pequeños.

Pregunta fundamental:

¿Existe un sistema armónico basado en un *único número irracional* que genere toda la estructura tonal?

Respuesta: Sí. El número áureo φ puede ser el operador estructural de un sistema armónico completo.

Este artículo no pretende reemplazar 12-TET —es un sistema *alternativo*, no superior. Tampoco imita la armonía tonal clásica; es un *universo paralelo*. Pretendemos explorar un sistema matemáticamente coherente, generar música única e identificable, y proveer herramientas compositivas experimentales.

2. La proporción áurea como operador musical

2.1 Propiedades únicas de φ

El número áureo posee propiedades matemáticas extraordinarias:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.618033988749895...$$

Autosimilitud recursiva:

- $\varphi^2 = \varphi + 1$
- $\varphi^3 = 2\varphi + 1$
- $\varphi^{n+1} = \varphi^n + \varphi^{n-1}$ (relación de Fibonacci)

Omnipresencia natural:

- Espirales de galaxias, nautilus, girasoles
- Filotaxis (ángulo áureo = 137.5°)
- Proporciones humanas (Vitruvio, Da Vinci)

Convergencia de Fibonacci:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F(n)}{F(n-1)} = \varphi$$

2.2 Hipótesis central

> Si φ estructura formas naturales y es el límite de una serie recursiva fundamental, **puede estructurar también un sistema tonal coherente**.

La diferencia con usos previos de φ en música (Bartók, Debussy) es que aquí φ no es decorativo sino *generador*: toda la estructura —escalas, acordes, consonancia, función armónica— emerge de potencias de φ.

3. Sistema 12-φ: División por potencias de φ

3.1 La escala cromática áurea

La escala se genera dividiendo la octava (1200 cents) recursivamente por φ:

$$ n_i = (1200 \cdot \varphi^{-i}) \mod 1200 \quad \text{para } i \in [0, 11] $$

Escala cromática 12-φ (ordenada por cents)

Índice φ	Cents	Frecuencia (A=440)	Gap siguiente
φ_0	0.00	440.00 Hz	7.91
φ_7	7.91	442.01 Hz	29.56
φ_9	37.47	449.59 Hz	118.28
φ_2	155.75	481.82 Hz	37.47
φ_{11}	193.22	491.86 Hz	118.28
φ_4	311.50	527.58 Hz	155.75
φ_6	467.25	580.73 Hz	156.11
φ_8	623.36	639.11 Hz	118.28
φ_1	741.64	690.77 Hz	37.47
φ_{10}	779.11	706.30 Hz	118.28
φ_3	897.39	762.00 Hz	155.75
φ_5	1053.14	838.39 Hz	146.86

Observación clave: Los intervalos son altamente variables (8-156 cents), a diferencia de los 100 cents uniformes de 12-TET. Esto crea una sonoridad única pero requiere reentrenamiento auditivo.

3.2 Función de consonancia

Definimos consonancia como *proximidad a potencias de φ*, no como ratios simples:

$$ C(I) = e^{-\frac{d^2}{\sigma^2}} $$

donde:

- d = distancia mínima del intervalo I a cualquier φ^k ($k \in \mathbb{Z}$)
- σ = tolerancia (típicamente 25 cents / 2)

Esta función gaussiana produce valores entre 0 (disonante) y 1 (perfectamente consonante con φ).

3.3 Escalas diatónicas optimizadas

Para seleccionar 7 notas de las 12 cromáticas, evaluamos las C(12,7) = 792 combinaciones posibles:

$$\text{Score}(S_7) = \sum_{i < j} C(|n_i - n_j|) - 10 \times \text{(microintervalos < 80¢)}$$

La penalización evita escalas con pasos demasiado pequeños para ser percibidos claramente.

4. Sistema 15-φ: Quintas áureas apiladas

4.1 Motivación: limitaciones del 12-φ

El sistema 12-φ presenta problemas prácticos:

- **Distribución no uniforme:** Gaps de 8 a 147 cents
- **Microintervalos problemáticos:** Pasos < 30 cents difíciles de percibir
- **Cobertura irregular:** Algunas regiones de la octava poco representadas

4.2 Fórmula generadora

La **quinta áurea** es el intervalo fundamental:

$$\text{Quinta áurea} = 1200 \times \log_2(\varphi) = 833.09 \text{ cents}$$

Apilando 15 quintas áureas:

$$\text{cents}_i = (i \times 833.09) \mod 1200 \quad \text{para } i \in [0, 14]$$

15 quintas cubren aproximadamente 10.41 octavas, proporcionando mejor "cierre" que 12.

4.3 Ventajas distributivas

Comparación de distribución

Métrica	12-φ	15-φ	12-TET
Gap promedio	100 cents	80 cents	100 cents
Gap mínimo	7.91 cents	33.09 cents	100 cents
Gap máximo	147.53 cents	99.27 cents	100 cents
Cobertura	Irregular	Excelente	Perfecta

> **Ventaja principal:** El sistema 15-φ elimina microintervalos extremos y proporciona distribución más uniforme manteniendo las propiedades matemáticas de φ.

5. Sistema 12-φW: El puente occidental

5.1 El descubrimiento clave

Al tomar solo **12 quintas áureas apiladas** (en lugar de 15), emerge un resultado sorprendente:

$$\text{cents}_i = (i \times 833.09) \mod 1200 \quad \text{para } i \in [0, 11]$$

El semitono promedio resultante es **~99 cents**, casi idéntico a los 100 cents de 12-TET.

Esto significa que el sistema 12-φW "suena familiar" al oído occidental, mientras preserva la quinta áurea de 833 cents.

5.2 Comparación con 12-TET

12-φW vs 12-TET

Característica	12-TET	12-φW
Generador	2^(1/12) = 100¢	φ^stack = 833¢
Semitono promedio	100 cents	~99 cents
Quinta	700 cents	833 cents
Filosofía	Pragmática	Híbrida
Familiaridad	Máxima	Alta
Coherencia φ	Ninguna	Preservada

5.3 Aplicaciones prácticas

- **Transición pedagógica:** Introducir armonía φ a músicos formados en 12-TET
- **Hibridación:** Combinar pasajes 12-TET y 12-φW en la misma obra
- **Experimentación accesible:** Explorar φ sin abandonar la familiaridad tonal
- **Progresiones clásicas:** I-IV-V-I, ii-V-I, Blues funcionan directamente

6. Implementación técnica

6.1 Motor matemático (GoldenHarmonyEngine)

El motor JavaScript (~830 líneas) implementa:

```
class GoldenHarmonyEngine {
    constructor() {
        this.PHI = (1 + Math.sqrt(5)) / 2;
        this.chromaticScale = this.generateChromaticScale();
        this.consonanceCache = new Map();
    }

    consonance(intervalCents, tolerance = 25) {
        // Buscar potencia de ϕ más cercana
        let minDistance = Infinity;
        for (let k = -5; k <= 5; k++) {
            const phiInterval = 1200 * Math.log2(Math.pow(this.PHI, k));
            const wrapped = ((phiInterval % 1200) + 1200) % 1200;
            let dist = Math.abs(intervalCents - wrapped);
            dist = Math.min(dist, 1200 - dist);
            minDistance = Math.min(minDistance, dist);
        }
        // Gaussiana
        const sigma = tolerance / 2.0;
        return Math.exp(-(minDistance * minDistance) / (sigma * sigma));
    }
}
```

6.2 Síntesis de audio

Web Audio API con ADSR envelopes, panning estéreo y filtros:

```
function playNote(frequency, duration, volume, waveform) {
    const osc = audioContext.createOscillator();
    const envelope = audioContext.createGain();
    const filter = audioContext.createBiquadFilter();

    osc.type = waveform;  // sine, triangle, sawtooth, square
    osc.frequency.value = frequency;

    // ADSR Envelope
    const now = audioContext.currentTime;
    envelope.gain.setValueAtTime(0, now);
    envelope.gain.linearRampToValueAtTime(volume, now + 0.05);
    envelope.gain.linearRampToValueAtTime(volume * 0.7, now + 0.15);
    envelope.gain.setValueAtTime(volume * 0.7, now + duration - 0.2);
    envelope.gain.linearRampToValueAtTime(0, now + duration);

    // Routing
    osc.connect(filter);
    filter.connect(envelope);
    envelope.connect(masterGain);

    osc.start(now);
    osc.stop(now + duration);
}
```

6.3 Las 9 simulaciones

Simulaciones del Music Theory Lab

Sistema	Simulación	Función	Líneas
12-φ	Escala Cromática	Explorador de 12 notas	~850
	Armonizador	Constructor de acordes	~1100
	Compositor	Generador SATB	~900
15-φ	Escala 15 Notas	Explorador microtonal	~550
	Armonizador 15	Acordes de 3-5 notas	~600
	Compositor 15	Generador SATB	~550
12-φW	Escala φW	Comparador occidental	~650
	Armonizador φW	Progresiones clásicas	~620
	Compositor φW	SATB occidental-φ	~600

Total: ~11,500 líneas de código + documentación

7. Composición algorítmica

El compositor genera preludios SATB (4 voces: Soprano, Alto, Tenor, Bajo) siguiendo reglas de contrapunto áureo:

Reglas adaptadas de Fux/Schoenberg:

1. **No quintas áureas paralelas:** Evitar φ^1 (833¢) consecutivos entre las mismas voces
2. **Saltos limitados:** Máximo φ^3 (~299¢) sin resolución por paso
3. **Movimiento preferido:** Contrario y oblicuo sobre paralelo
4. **Voice leading óptimo:** Minimizar movimiento total (algoritmo greedy)

Algoritmo de generación:

```
function generatePrelude(params) {
    // 1. Generar progresión armónica (4-16 acordes)
    const progression = generateProgression(scale, complexity);

    // 2. Bajo: fundamentales de acordes
    const bass = progression.map(chord => chord.notes[0]);

    // 3. Alto/Tenor: notas intermedias con voice leading
    const inner = generateInnerVoices(progression, bass);

    // 4. Soprano: melodía con densidad rítmica variable
    const soprano = generateSopranoLine(progression, density);

    // 5. Verificar contrapunto y corregir paralelos
    return verifyCounterpoint({ soprano, alto, tenor, bass });
}
```

8. Reflexiones: ¿Qué significa música "áurea"?

8.1 No es ciencia, es diseño

A diferencia de Kepler, quien creía que la música celestial *existía* objetivamente, nosotros *elegimos* φ como generador. Las frecuencias son arbitrarias —podrían ser otras. El sistema es una **construcción estética**, no un descubrimiento.

Pero no es pura ficción. Las relaciones matemáticas son reales:

- $\varphi^2 = \varphi + 1$ (autosimilitud verificable)
- La función de consonancia es continua y derivable
- Las optimizaciones combinatorias son computables

8.2 Tres sabores de extrañeza

12-φ: "¿Qué música existiría si φ definiera todos los intervalos?"

15-φ: "¿Y si usáramos más notas, distribuidas por quintas áureas?"

12-φW: "¿Podemos tener lo mejor de ambos mundos?"

El gradiente de familiaridad va de 12-φW (más accesible) a 12-φ (más experimental), permitiendo transición gradual.

8.3 Limitaciones honestas

- Requiere **reentrenamiento auditivo** (especialmente 12-φ y 15-φ)
- Incompatible con instrumentos de afinación fija
- No hay repertorio existente (oportunidad creativa)
- La quinta de 833¢ suena "rara" incluso en 12-φW

9. Conclusiones

El Sistema Armónico Áureo demuestra que es posible construir una teoría musical completa desde un único principio matemático. Los tres sistemas desarrollados ofrecen:

Sistema	Fortaleza	Uso ideal
12-φ	Máxima coherencia φ	Música experimental, drones
15-φ	Mejor distribución	Microtonalidad, texturas ricas
12-φW	Familiaridad + φ	Jazz experimental, transición pedagógica

La implementación web permite exploración inmediata sin instalación de software. El código es abierto y extensible.

Tres caminos, un principio: la armonía nace del número áureo.

Queda por investigar: ritmos áureos (duraciones basadas en φ), timbres áureos (síntesis FM con ratios φ), y estudios perceptivos formales sobre adaptación auditiva.

Referencias

[1] Livio, M. (2002). *The Golden Ratio: The Story of Phi, the World's Most Astonishing Number*. Broadway Books.

[2] Dunlap, R. A. (1997). *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers*. World Scientific.

[3] Barbour, J. M. (1953). *Tuning and Temperament: A Historical Survey*. Michigan State College Press.

[4] Partch, H. (1974). *Genesis of a Music* (2nd ed.). Da Capo Press.

[5] Sethares, W. A. (2005). *Tuning, Timbre, Spectrum, Scale* (2nd ed.). Springer.

[6] Plomp, R., & Levelt, W. J. M. (1965). "Tonal Consonance and Critical Bandwidth." *JASA*, 38(4), 548-560.

[7] Helmholtz, H. von (1877). *On the Sensations of Tone*. Dover Publications (1954 reprint).

[8] Cope, D. (2005). *Computer Models of Musical Creativity*. MIT Press.

[9] W3C. (2021). "Web Audio API Specification." https://www.w3.org/TR/webaudio/

[10] Kepler, J. (1619). *Harmonices Mundi*. Linz: Johann Planck.

Apéndice A: Tabla de intervalos áureos

k	φ^k	Cents (mod 1200)	Nombre propuesto
0	1.0000	0.00	Unísono
1	1.6180	833.09	Quinta áurea
2	2.6180	466.18	Cuarta áurea superior
3	4.2361	299.27	Tono áureo mayor
4	6.8541	932.36	Sexta áurea mayor
5	11.0902	565.45	Tritono áureo
-1	0.6180	366.91	Cuarta áurea invertida
-2	0.3820	733.82	Quinta áurea invertida

Apéndice B: Glosario

Término	Definición
φ (phi)	Número áureo, 1.618033988749895
Cents	Unidad logarítmica: 1200 cents = 1 octava
Consonancia áurea	Proximidad gaussiana a potencias de φ
Quinta áurea	833.09 cents = $1200 \times \log_2(\varphi)$
12-φ	Sistema de 12 notas por división recursiva
15-φ	Sistema de 15 notas por quintas apiladas
12-φW	Sistema de 12 notas "occidental" por quintas
Stack order	Orden de generación por quintas apiladas
Voice leading	Conducción de voces minimizando movimiento

Demo interactiva: Music Theory Lab

EigenLab · Enero 2026